

# SUR LES AUTOMORPHISMES BORNÉS DE CORPS MUNIS D'OPÉRATEURS

THOMAS BLOSSIER, CHARLOTTE HARDOUIN ET AMADOR MARTIN-PIZARRO

RÉSUMÉ. Nous donnons une preuve alternative, valable en toute caractéristique, d'un ancien résultat de Lascar caractérisant les automorphismes bornés d'un corps algébriquement clos. Cette méthode se généralise au cas des automorphismes bornés de certains corps munis d'opérateurs.

## ENGLISH SUMMARY

We give an alternative proof, valid in all characteristics, of a result of Lascar characterising the bounded automorphisms of an algebraically closed field. We generalise this method to various fields equipped with operators.

## INTRODUCTION

Le groupe des automorphismes d'une structure dénombrable, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, est un groupe *polonais*, un groupe topologique homéomorphe à un espace métrique séparable complet. Le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(\mathcal{M})$  d'une structure  $\mathcal{M}$  contient un sous-groupe distingué, le sous-groupe  $\text{Aut}_f(\mathcal{M})$  des automorphismes forts. Un automorphisme est *fort* s'il fixe les classes de toute relation d'équivalence définissable sans paramètres avec un nombre fini de classes. Par exemple, pour le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, il s'avère que les automorphismes forts coïncident avec les automorphismes fixant  $\mathbb{Q}^{\text{alg}}$ . Ainsi, le quotient  $\text{Aut}(\mathbb{C})/\text{Aut}_f(\mathbb{C})$  est le groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}$ . Plus généralement, le quotient  $\text{Aut}(\mathcal{M})/\text{Aut}_f(\mathcal{M})$ , qui dépend uniquement de la théorie  $T$  de  $\mathcal{M}$ , est un groupe profini, nommé le *groupe de Galois* de  $T$ .

Le groupe de Galois d'une théorie est loin d'être compris en général. En revanche, pour les théories fortement minimales (qui incluent celles des corps algébriquement clos), le sous-groupe  $\text{Aut}_f(\mathcal{M})$  est simple modulo les automorphismes forts bornés [14]. Rappelons qu'un élément est *algébrique* sur une sous-partie  $A$  s'il satisfait une formule à paramètres sur  $A$  ayant un nombre fini des réalisations. Ceci correspond à la notion usuelle d'éléments algébriques sur  $A \subset \mathbb{C}$ . Pour une théorie fortement minimale, l'opérateur clôture algébrique satisfait le principe de l'échange et induit une

---

*Date:* 14 avril 2016.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C45, 12H05.

*Key words and phrases.* Model Theory, Automorphism Group, Fields with operators.

Cette collaboration a débuté lors du programme thématique *Model Theory, Arithmetic Geometry and Number Theory* au printemps 2014 au MSRI, que nous remercions. Le travail du second auteur a reçu le soutien du projet ANR-11-LABX-0040-CIMI dans le cadre du programme ANR-11-IDEX-0002-02 ainsi que du projet ANR-10-JCJC 0105. Les premier et troisième auteurs ont conduit cette recherche grâce au soutien du projet ValCoMo ANR-13-BS01-0006, sans subvention ni du projet ANR-10-LABX-0070, ni du projet ANR-11-IDEX-0007.

dimension, qui correspond au degré de transcendance pour les corps algébriquement clos.

Un automorphisme  $\tau$  est *borné* s'il existe un ensemble fini  $A$  tel que pour tout élément  $b$ , l'image  $\tau(b)$  est algébrique sur  $A \cup \{b\}$ . (Cette définition est équivalente à la définition originale de Lascar, voir [14, Preuve du Théorème 15].)

La simplicité du groupe  $\text{Aut}_f(\mathcal{M})$  modulo les automorphismes forts bornés a été généralisée [8] à toute structure  $\mathcal{M}$  munie d'une dimension à valeurs entières avec une relation d'indépendance stationnaire compatible avec cette dimension, en remplaçant *algébrique* par *de dimension relative 0* dans la définition des automorphismes bornés.

Pour un pur corps algébriquement clos  $K$  de caractéristique 0, Lascar montre [14, Théorème 15] que l'unique automorphisme borné est l'identité. Ainsi  $\text{Aut}_f(K)$  est simple. Il mentionne que Ziegler a décrit les automorphismes bornés d'un pur corps algébriquement clos en toute caractéristique [21] : les seuls automorphismes bornés d'un corps algébriquement clos en caractéristique positive sont les puissances entières du Frobenius.

Konnerth montre la trivialité des automorphismes bornés d'un corps différentiellement clos de caractéristique 0, en prenant pour notion de dimension le degré de transcendance différentiel [13, Proposition 2.9].

D'autres exemples classiques de corps munis d'un opérateur sont les corps aux différences génériques : modèles existentiellement clos dans la classe des corps dans le langage des anneaux enrichi par un symbole dénotant un automorphisme. Ces corps sont obtenus en prenant des ultraproducts de puissances de Frobenius sur la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$  [11]. Un grand nombre des propriétés modèle-théoriques valables dans le cas des purs corps ou des corps différentiels en caractéristique 0 s'étendent à ce contexte. Dans [16], Moosa et Scanlon proposent une approche qui englobe les corps différentiellement clos et les corps aux différences génériques en caractéristique 0 : les *corps munis d'opérateurs libres*. Cependant, leur méthode ne s'applique ni en caractéristique positive, ni lorsque les opérateurs commutent, ce qui exclut, en particulier, deux exemples connus en caractéristique nulle : les corps différentiels avec  $n$  dérivations qui commutent, étudiés par McGrail [15], et les corps différentiels aux différences, traités par Hrushovski ainsi que par Bustamante-Medina [5].

Un élément d'un corps  $K$  muni d'opérateurs est *générique* si ses mots en les opérateurs ne satisfont aucune relation algébrique, mis à part celles imposées par la théorie. Contrairement aux cas des corps différentiels ou aux différences, un élément non-générique d'un corps muni de plusieurs opérateurs n'est pas toujours fini-dimensionnel : il peut engendrer une sous-structure de degré de transcendance infini. Il n'existe à priori pas de notion naturelle de dimension pour définir quand un automorphisme est borné. En revanche, à partir d'un (tout) type générique, on peut définir un opérateur clôture adéquat : la clôture d'une partie  $D$  de  $K$  est l'ensemble des éléments *co-étrangers* sur  $D$  aux génériques (*cf.* définition 2.8). Dans le cas des purs corps algébriquement clos, cette clôture correspond à la clôture algébrique ; dans le cas des corps différentiellement clos ou aux différences génériques, la clôture de  $D$  est l'ensemble des éléments fini-dimensionnels au-dessus de  $D$ .

Un automorphisme  $\tau$  est alors borné s'il existe un ensemble fini  $A$  tel que pour tout générique  $b$  sur  $A$ , l'image  $\tau(b)$  appartient à la clôture de  $A \cup \{b\}$ .

Dans cet article, nous donnons une preuve uniforme (cf. Théorème 3.1), qui s'inspire de celle de Ziegler pour les purs corps algébriquement clos [21], permettant de caractériser les automorphismes bornés des corps munis d'opérateurs suivants :

**Théorème.** *Pour les corps munis d'opérateurs suivants :*

- les corps algébriquement clos  $(K, \text{Id})$  en toute caractéristique avec automorphisme associé l'identité ;
- les corps différentiellement clos  $(K, \delta_1, \dots, \delta_n)$  en caractéristique nulle avec  $n$  dérivations qui commutent avec automorphisme associé l'identité ;
- les corps aux différences génériques  $(K, \sigma)$  en toute caractéristique avec automorphisme associé  $\sigma$  ;
- les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini avec une  $p$ -base nommée et automorphisme associé l'identité ;
- les corps différentiels aux différences  $(K, \delta, \sigma)$  en caractéristique nulle avec automorphisme associé  $\sigma$ , qui commute avec  $\delta$  ;
- les corps  $(K, F_1, \dots, F_n)$  munis d'opérateurs libres en caractéristique nulle, avec automorphismes associés  $\sigma_0, \dots, \sigma_t$  ;

*tout automorphisme borné est un produit des automorphismes associés et de leurs inverses, ainsi que du Frobenius et son inverse, si le corps est parfait de caractéristique positive.*

En particulier, on retrouve le résultat de Ziegler : le groupe des automorphismes forts d'un corps algébriquement clos en caractéristique positive est simple modulo le sous-groupe cyclique engendré par le Frobenius.

**Remarque.** Notons que les automorphismes associés sont des automorphismes corpiques mais pas nécessairement des automorphismes de la structure : par exemple, pour un corps muni de deux automorphismes libres distincts, chacun de ces automorphismes est un automorphisme associé.

Nous remercions le rapporteur anonyme pour ses suggestions et remarques qui nous ont permis d'améliorer la présentation de ce travail. Le troisième auteur tient à s'excuser auprès de F. O. Wagner pour avoir mis du temps à comprendre l'intérêt de la clôture analysable. En s'inspirant de cet article, Wagner a par ailleurs démontré [19] que tout automorphisme borné d'un corps ayant une théorie simple est définissable.

## 1. CORPS MUNIS D'OPÉRATEURS

Dans ce travail, nous considérons des corps munis d'opérateurs additifs. Les premiers exemples sont les corps algébriquement clos, les corps différentiellement clos, ainsi que les corps algébriquement clos aux différences. Moosa et Scanlon [16] ont développé un formalisme pour traiter simultanément ces trois cas. Pour la présentation des résultats, nous allons supposer que les opérateurs sont en nombre fini. Pour les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini [20, 7], voir la remarque 3.2.

**Définition 1.1.** Un *corps muni d'opérateurs* sur un sous-corps de base  $\mathbb{F} \subset K$  est une structure

$$(K, 0, 1, +, -, \cdot, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}}, F_1, \dots, F_n)$$

telle que :

- (1) les opérateurs  $F_1, \dots, F_n$  sont  $\mathbb{F}$ -linéaires et vérifient pour tous  $x$  et  $y$  dans  $K$ ,

$$F_k(xy) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^k F_i(x) F_j(y),$$

pour certaines constantes  $\{a_{i,j}^k\}_{0 \leq i, j, k \leq n}$  dans  $\mathbb{F}$  (avec  $F_0$  l'identité);

- (2) le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $\mathbb{F}\epsilon_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}\epsilon_n$  est une  $\mathbb{F}$ -algèbre commutative, avec

$$\epsilon_i \epsilon_j = \sum_{0 \leq k \leq n} a_{i,j}^k \epsilon_k.$$

Une telle structure est bi-interprétable avec  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}}, D(K), \varphi)$ , où  $D(K)$  est une  $K$ -algèbre égale au  $K$ -espace vectoriel  $K\epsilon_0 \oplus \dots \oplus K\epsilon_n$  de dimension  $n+1$ , avec un morphisme de  $\mathbb{F}$ -algèbres  $\varphi : K \rightarrow D(K)$  tel que la projection de  $D(K)$  sur la première coordonnée composée avec  $\varphi$  soit l'identité.

Pour cela, il suffit de poser

$$\varphi(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} F_k(x) \epsilon_k.$$

Cette approche est celle de [16].

La  $\mathbb{F}$ -algèbre  $D(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\epsilon_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}\epsilon_n$  étant de dimension finie, elle est isomorphe à un produit de  $\mathbb{F}$ -algèbres locales  $B_0(\mathbb{F}), \dots, B_t(\mathbb{F})$  [1, Theorem 8.7]. Les corps résiduels de ces algèbres locales sont des extensions finies de  $\mathbb{F}$ , et donc égaux à  $\mathbb{F}$  dès que  $\mathbb{F}$  est algébriquement clos. Moosa et Scanlon donnent un exemple sur  $\mathbb{Q}$  avec deux opérateurs [16, Example 4.2] de corps résiduel  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . En revanche, ce phénomène n'existe pas pour un seul opérateur non trivial.

**Proposition 1.2.** *Soit  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}}, F)$  un corps muni d'un seul opérateur  $F$ . Alors, il existe des constantes  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathbb{F}$  vérifiant  $b^2 - b = ac$  telles que*

$$F(xy) = axy + b(xF(y) + yF(x)) + cF(x)F(y)$$

*pour tous  $x$  et  $y$  dans  $K$ . De plus, l'algèbre  $D(\mathbb{F})$  est ou bien locale de corps résiduel  $\mathbb{F}$ , ou bien isomorphe à  $\mathbb{F}^2$ .*

*Enfin, la structure est soit bi-interprétable avec celle de pur corps au-dessus de  $\mathbb{F}$ , soit bi-interprétable avec  $K$  muni d'une dérivation ou d'un endomorphisme non-trivial.*

*Démonstration.* Si  $F = \lambda \text{Id}$ , pour un certain  $\lambda$  dans  $\mathbb{F}$ , alors  $b = c = 0$  et  $a = \lambda$  conviennent. L'algèbre  $D(\mathbb{F})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}^2$  et la structure est bi-interprétable avec celle de pur corps au-dessus de  $\mathbb{F}$ . Supposons maintenant que  $F$  soit  $\mathbb{F}$ -linéairement indépendant de l'identité et que la  $\mathbb{F}$ -algèbre  $D(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\epsilon_0 \oplus \mathbb{F}\epsilon_1$  soit donnée par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0^2 &= \epsilon_0 + a\epsilon_1 \\ \epsilon_0\epsilon_1 &= \alpha\epsilon_0 + b\epsilon_1 \\ \epsilon_1^2 &= \beta\epsilon_0 + c\epsilon_1 \end{aligned} \right\}$$

où les constantes  $a, b, c, \alpha$  et  $\beta$  appartiennent à  $\mathbb{F}$ . En particulier, puisque  $\varphi$  est un homomorphisme d'anneaux, on obtient que

$$\begin{aligned} \varphi(xy) = xy\epsilon_0 + F(xy)\epsilon_1 &= \left( xy + \alpha(xF(y) + yF(x)) + \beta F(x)F(y) \right) \epsilon_0 + \\ &\quad \left( axy + b(xF(y) + yF(x)) + cF(x)F(y) \right) \epsilon_1. \end{aligned}$$

Puisque la projection de  $\varphi$  sur la première coordonnée est l'identité sur  $K$ , on en déduit que  $\alpha(xF(y) + yF(x)) + \beta F(x)F(y) = 0$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $K$ . En posant  $x = y$ , on obtient pour tout  $x$  dans  $K$ ,

$$F(x)(2\alpha x + \beta F(x)) = 0.$$

Vérifions que  $\alpha = \beta = 0$ . Si  $\alpha = 0$ , alors  $\beta = 0$ , car  $F$  n'est pas l'opérateur trivial nul. Supposons  $\alpha \neq 0$ . Dans ce cas, l'opérateur  $F$  ne s'annule qu'en 0 : soient  $x_0$  et  $y_0$  tels que  $F(x_0) \neq 0$  et  $F(y_0) = 0$ . Alors  $F(x_0 + y_0) = F(x_0) \neq 0$  et donc  $2\alpha(x_0 + y_0) = -\beta F(x_0 + y_0) = -\beta F(x_0) = 2\alpha x_0$ . On conclut que  $y_0 = 0$  et  $F$  est colinéaire à l'identité.

Comme  $\alpha = \beta = 0$ , il suit que l'idéal engendré par  $\epsilon_1$  est un idéal maximal de  $D(\mathbb{F})$ .

L'égalité  $\epsilon_0^2 \epsilon_1 = \epsilon_0(\epsilon_0 \epsilon_1)$  nous permet de déduire que  $b^2 = b + ac$ . De plus, l'opérateur  $F$  satisfait :

$$F(xy) = axy + b(xF(y) + yF(x)) + cF(x)F(y).$$

Si  $c = 0$ , alors  $b \neq 0$ , car  $F$  est linéairement indépendant de l'identité. Puisque  $(\epsilon_0 + \lambda \epsilon_1)\epsilon_1 = b\epsilon_1$  pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{F}$ , le seul idéal maximal de  $D(\mathbb{F})$  est l'idéal engendré par  $\epsilon_1$ . Comme  $1 = \varphi(1) \equiv \epsilon_0 \pmod{(\epsilon_1)}$ , on conclut que  $D(\mathbb{F})$  est locale avec corps résiduel  $\mathbb{F}$ . De plus, comme  $b^2 = b + ac$ , alors  $b = 1$  et l'application  $\delta = F + a\text{Id}$  est une dérivation.

Si  $c \neq 0$ , alors on pose  $\epsilon'_1 = c^{-1}\epsilon_1$  et  $\epsilon'_0 = \epsilon_0 - b\epsilon'_1$ . On obtient ainsi une base orthonormale de  $D(\mathbb{F})$ , qui est donc isomorphe à  $\mathbb{F}^2$ . L'application  $\sigma = cF + b\text{Id}$  est alors un morphisme de corps qui ne peut être trivial.  $\square$

**Remarque 1.3.** Les opérateurs sur les corps considérés par Moosa et Scanlon sont libres, dans le sens qu'ils ne satisfont aucune relation [16, Remark 3.8]. Ici, nous n'imposons pas cette liberté pour les opérateurs. Ainsi, les corps différentiels avec  $n$  dérivations qui commutent et les corps différentiels aux différences sont également des corps munis d'opérateurs selon la définition 1.1. Soit  $(K, \delta_1, \dots, \delta_n)$  un corps muni de  $n$  dérivations qui commutent. Notons par  $\mathbb{F}$  le corps premier de  $K$  et soit  $D(\mathbb{F})$  l'algèbre correspondante engendrée par  $1 = \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  avec les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{ll} \epsilon_i^2 &= 0 \quad \text{si } 0 < i \leq n \\ \epsilon_i \epsilon_j &= 0 \quad \text{si } i \neq j \text{ et } i, j > 0. \end{array} \right\}$$

Alors  $D(\mathbb{F})$  est locale avec idéal maximal  $\mathfrak{m} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  et corps résiduel  $\mathbb{F}$ .

Si  $(K, \delta, \sigma)$  est un corps muni d'une dérivation et d'un endomorphisme qui commutent [5], alors, au-dessus du corps premier  $\mathbb{F}$ , l'algèbre  $D(\mathbb{F})$  engendrée par  $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$  satisfait les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{ll} 1 &= \epsilon_0 + \epsilon_2 \\ \epsilon_i^2 &= \epsilon_i \quad \text{si } i \neq 1 \\ \epsilon_1^2 &= 0 \\ \epsilon_0 \epsilon_1 &= \epsilon_1 \\ \epsilon_0 \epsilon_2 &= 0 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 &= 0. \end{array} \right\}$$

Les seuls idéaux maximaux de  $D(\mathbb{F})$  sont  $\mathfrak{m}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2)$  et  $\mathfrak{m}_1 = (\epsilon_0, \epsilon_1)$ . Notons que  $(\mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_1)^2 = (\epsilon_1)^2 = 0$ . Chaque algèbre  $B_i(\mathbb{F}) = D(\mathbb{F})/\mathfrak{m}_i^2$  est locale d'idéal maximal

l'image de  $\mathfrak{m}_i$  modulo  $\mathfrak{m}_i^2$  et corps résiduel  $\mathbb{F}$ . L'algèbre  $D(\mathbb{F})$  est isomorphe au produit  $B_0(\mathbb{F}) \times B_1(\mathbb{F})$ , par le théorème des restes chinois.

**Hypothèse 1.** (cf. *Assumption 4.1* [16]) *Chaque algèbre locale associée à  $D(\mathbb{F})$  a pour corps résiduel  $\mathbb{F}$ .*

En tensorisant chaque algèbre locale par  $K$ , si  $\theta_i$ , respectivement  $\rho_i$ , dénote la projection de  $D(K)$  sur  $B_i(K)$ , respectivement la projection résiduelle de  $B_i(K)$  sur  $K$ , on obtient un endomorphisme  $\sigma_i = \rho_i \circ \theta_i \circ \varphi$  de  $K$ . Notons que l'identité est l'un de ces endomorphismes, que l'on suppose être  $\sigma_0$ . Ces endomorphismes sont combinaisons  $\mathbb{F}$ -linéaires des opérateurs et ils ne dépendent que de la structure  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}}, D(K), \varphi)$ . En particulier, si l'on considère une transformation  $\mathbb{F}$ -linéaire inversible des opérateurs, on obtient une structure bi-interprétable ayant les mêmes endomorphismes associés.

Dans le cas d'un seul opérateur  $F$  avec constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$ , comme dans la proposition 1.2, les endomorphismes obtenus sont l'identité et  $\sigma = b\text{Id} + cF$  si  $c \neq 0$ . Lorsque  $c = 0$ , l'identité est le seul endomorphisme associé. Il en est de même pour les corps avec  $n$  dérivations qui commutent. Si  $(K, \delta, \sigma)$  est comme dans la remarque 1.3, alors les endomorphismes associés sont l'identité et  $\sigma$ .

**Hypothèse 2.** *Par la suite, les endomorphismes  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$  du corps muni d'opérateurs  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, F_1, \dots, F_n)$  sont des automorphismes de corps. Ceci est le cas pour les modèles existentiellement clos dans la classe des corps en caractéristique nulle munis d'opérateurs libres [16, Lemma 4.11], ainsi que pour les corps aux différences génériques, en toute caractéristique [6] ou pour les corps différentiels aux différences [5].*

**Proposition 1.4.** *Étant donné un corps muni d'opérateurs*

$$(K, 0, 1, +, -, \cdot, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{F}}, F_1, \dots, F_n)$$

*satisfaisant l'hypothèse (1), il existe une transformation  $\mathbb{F}$ -linéaire inversible qui rend les opérateurs triangulaires :*

$$F_j(xy) = \sigma_{i_j}(x)F_j(y) + \sum_{l < j} R_{j,l}(x)F_l(y),$$

où chaque  $R_{j,l}(x)$  est un polynôme à coefficients sur  $\mathbb{F}$  en les symboles  $\{F_r(x)\}_{0 \leq r \leq j}$ .

*Démonstration.* Par une première transformation linéaire inversible, on peut supposer que la base linéaire  $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$  du  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $D(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\epsilon_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}\epsilon_n$  est l'union de bases linéaires des algèbres locales  $B_i(\mathbb{F})$  associées.

Il reste alors à traiter le cas de chaque algèbre locale, que l'on dénote  $(B(\mathbb{F}), \mathfrak{m})$ . Par l'hypothèse 1 et le théorème principal de Wedderburn-Mal'cev [17, p. 209], l'algèbre  $B(\mathbb{F})$  peut s'écrire, en tant que  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel, comme une somme directe de  $\mathbb{F}1_{B(\mathbb{F})}$  et  $\mathfrak{m}$ . Prenons une base  $\mathbb{F}$ -linéaire  $\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_r\}$  de  $\mathfrak{m}$ . Notons  $\sigma$  l'endomorphisme de  $K$  correspondant et  $\theta$  la projection de  $D(K)$  sur  $B(K)$ . Alors pour tout  $x$  dans  $K$ ,

$$\theta \circ \varphi(x) = \sigma(x) + F'_1(x)\epsilon'_1 + \dots + F'_r(x)\epsilon'_r$$

où les  $F'_j$  (y compris  $\sigma = F'_0$ ) sont les opérateurs obtenus par ce changement de base.

La multiplication par chaque  $\epsilon'_j$  est une application nilpotente de  $B(\mathbb{F})$ , car  $\mathfrak{m}^s = 0$  pour  $s \gg 0$ . De plus, les applications  $\epsilon'_j$  commutent entre elles. Il existe ainsi une

base  $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$  de  $\mathfrak{m}$  telle que toutes les applications multiplication par  $\epsilon'_j$  pour  $j \leq r$  sont triangulaires inférieures dans cette base avec unique valeur propre 0. Puisque chaque  $\eta_k$  est combinaison linéaire des  $\epsilon'_j$ , les multiplications par  $\eta_k$  sont également triangulaires inférieures dans la base  $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ . De plus, comme ces applications commutent, on obtient des constantes  $\{b_{k,l}(j)\}_{j,k,l \leq r} \in \mathbb{F}$  telles que :

$$\eta_k \eta_l = \sum_{j > \max k, l} b_{k,l}(j) \eta_j. \quad (\dagger)$$

Ainsi, après une nouvelle transformation linéaire inversible, le morphisme d'anneaux  $\theta \circ \varphi$  s'écrit sous la forme

$$\theta \circ \varphi(x) = \sigma(x) + F_1''(x)\eta_1 + \dots + F_r''(x)\eta_r.$$

L'identité  $\theta \circ \varphi(xy) = \theta \circ \varphi(x) \cdot \theta \circ \varphi(y)$  et  $(\dagger)$  donnent

$$\begin{aligned} F_j''(xy) &= \sigma(x)F_j''(y) + F_j''(x)\sigma(y) + \sum_{0 < k, l < j} b_{k,l}(j)F_k''(x)F_l''(y) \\ &= \sigma(x)F_j''(y) + \sum_{l < j} R'_{j,l}(x)F_l''(y), \end{aligned}$$

où  $F_0''(y) = \sigma(y)$ ,  $R'_{j,0}(x) = F_j''(x)$  et  $R'_{j,l}(x) = \sum_{0 < k < j} b_{k,l}(j)F_k''(x)$  pour  $0 < l < j$ .

En recollant les bases obtenues pour chacune des algèbres locales, on en déduit le résultat voulu.  $\square$

Nous considérons par la suite la famille  $\Theta$  des mots dans les opérateurs  $F_1, \dots, F_n$ ,  $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_t^{-1}$ , ainsi que Frob (où Frob désignera l'endomorphisme de Frobenius en caractéristique positive et l'identité en caractéristique nulle) munie de l'ordre lexicographique à partir des relations suivantes :

$$\sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1} < F_i < F_j < \text{Frob pour } i < j.$$

À chaque combinaison  $K$ -linéaire  $S(x)$  de mots en  $x$ , l'on associe son *degré*, le plus grand mot qui apparaît avec coefficient non-nul dans  $S$ . Ce coefficient sera appelé le *coefficient dominant* de  $S$ .

**Corollaire 1.5.** *Supposons que les opérateurs  $F_1, \dots, F_n$  sont triangulaires et, suivant les notations de la proposition 1.4, posons  $\sigma_{F_j} = \sigma_{i_j}$  et  $\sigma_{\sigma_j^{-1}} = \sigma_j^{-1}$ , ainsi que  $\sigma_{\text{Frob}} = \text{Frob}$ . Ainsi, chaque mot  $\theta$  de la famille  $\Theta$  détermine un produit  $\sigma_\theta$  en les endomorphismes correspondants aux lettres dans  $\theta$ , qui sera alors une composition d'une puissance du Frobenius avec des puissances entières des automorphismes associés au corps muni d'opérateurs.*

*Si  $S(x)$  est une combinaison  $K$ -linéaire de mots en  $x$  de degré  $\theta$  et coefficient dominant  $\lambda_\theta$ , alors pour tout  $g$  dans  $K$  on a*

$$S(gx) = \lambda_\theta \sigma_\theta(g)\theta(x) + R(x),$$

*où  $R(x)$  est une combinaison  $K$ -linéaire de mots en  $x$  de degré strictement inférieur à  $\theta$ .*

**Remarque 1.6.** Notons que nous avons besoin d'un nombre fini d'opérateurs et de l'hypothèse (1) pour pouvoir appliquer la proposition 1.4 et rendre les opérateurs triangulaires. Pour les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini, chacune des dérivations de Hasse-Schmidt itératives [22] est une suite infinie mais

déjà sous forme triangulaire avec automorphisme associé l'identité, donc ils satisfont l'hypothèse (2). Le corollaire précédent s'applique.

## 2. UNE PROMENADE MODÈLE-THÉORIQUE

Pour cette partie, nous nous plaçons à l'intérieur d'un corps  $K$  muni d'opérateurs satisfaisant l'hypothèse (2).

Nous supposons de plus par la suite :

**Hypothèse 3.** *Le corps  $K$  est séparablement clos (éventuellement algébriquement clos), suffisamment saturé et homogène dans le langage  $\mathcal{L}$  qui étend celui des anneaux par des constantes pour les éléments du sous-corps  $\mathbb{F}$ , par des symboles  $F_1, \dots, F_n, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_t^{-1}$  pour les opérateurs et les automorphismes associés.*

Étant donnée une partie  $A$ , nous notons  $\langle A \rangle$  le corps de fractions de la sous-structure engendrée par  $A$  à l'intérieur de  $K$ . Si  $k \subset K$  est un sous-corps, on dénote  $k^{\text{alg}}$  sa clôture algébrique au sens corpique.

Nous allons isoler des propriétés modèles-théoriques pour étudier les automorphismes bornés d'un tel corps. Deux uples  $a$  et  $b$  ont même type sur une partie  $D$ , noté  $a \equiv_D b$ , s'il existe un automorphisme fixant  $D$  qui envoie  $a$  sur  $b$ , pourvu que  $K$  soit  $|D|^+$ -fortement homogène. Pour les corps munis d'opérateurs libres en caractéristique nulle [16, Proposition 5.5 et Proposition 5.6], ainsi que pour les corps différentiels avec  $n$  dérivations qui commutent [15, Lemma 3.15] et pour les corps différentiels aux différences [5, Proposition 1.1 et Theorem 1.3], les types dans la théorie de  $K$  sont déterminés par le type aux différences de la  $\mathcal{L}$ -structure engendrée par une réalisation, ce qui motive l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 4.** *La clôture algébrique (au sens modèle-théorique) d'un sous-ensemble  $A$  coïncide avec  $\langle A \rangle^{\text{alg}} \cap K$ .*

En outre, deux uples  $a$  et  $b$  ont même type sur  $k = \langle k \rangle$  si et seulement s'il existe un  $\mathcal{L}$ -isomorphisme entre  $\langle k(a) \rangle^{\text{alg}} \cap K$  et  $\langle k(b) \rangle^{\text{alg}} \cap K$  qui envoie  $a$  sur  $b$  fixant  $k$ .

Étant données des sous-parties  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $K$ , l'on dit que  $A$  est indépendant de  $B$  sur  $C$ , dénoté  $A \perp_C B$ , si les extensions  $\langle A \cup C \rangle^{\text{alg}}$  et  $\langle B \cup C \rangle^{\text{alg}}$  sont linéairement disjointes sur  $\langle C \rangle^{\text{alg}}$ . Notons que cette relation est symétrique, transitive, de caractère fini et invariante par automorphismes de  $K$ . De plus, elle a caractère local : pour tout uple fini  $a$  et toute partie  $B$ , il existe  $B_0 \subset B$  de taille bornée par  $|\mathcal{L}|$ , avec  $a \perp_{B_0} B$ .

**Remarque 2.1.** Puisque chaque mot en  $a \cdot b$  ou en  $a + b$  s'exprime comme une combinaison de mots en  $a$  et  $b$ , si les éléments  $a$  et  $b$  sont indépendants sur  $C$ , alors  $a$  et  $a \cdot b$ , ainsi que  $a$  et  $a + b$ , le sont aussi.

**Hypothèse 5.** *L'indépendance définie ci-dessus satisfait les conditions suivantes :*

- (1) *Pour tout uple fini  $a$  et toutes sous-parties  $C \subset B$ , il existe  $a' \equiv_C a$  avec  $a' \perp_C B$  ;*
- (2) *Étant donné un sous-corps  $k = \langle k \rangle^{\text{alg}} \cap K$  et des uples  $a$  et  $b$  avec  $a \equiv_k b$ , pour toutes parties  $C$  et  $D$  contenant  $k$  telles que  $C \perp_k D$ , si  $a \perp_k C$  et  $b \perp_k D$ , alors il existe  $e \perp_k C \cup D$  tel que  $e \equiv_C a$  et  $e \equiv_D b$ .*

En particulier, le théorème de Kim-Pillay [12] donne que la  $\mathcal{L}$ -théorie  $T$  de  $K$  est simple et que l'indépendance correspond à la non-déviabilité, définie par Shelah.



Les exemples considérés satisfont l'hypothèse (5) : voir [15, Section 4.3] pour les corps différentiels avec  $n$  dérivations qui commutent, ainsi que [16, Theorem 5.9] pour les corps munis d'opérateurs libres en caractéristique nulle et [5, Theorem 1.3] pour les corps différentiels aux différences.

Nous renvoyons le lecteur à [18] pour une introduction aux théories simples.

**Définition 2.2.** La suite  $\{a_i\}_{i < \omega}$  est *indépendante* sur l'ensemble  $B$  si, pour tout  $m < \omega$ , on a

$$a_{m+1} \downarrow_B a_1, \dots, a_m.$$

La suite  $\{a_i\}_{i < \omega}$  est *indiscernable* sur l'ensemble  $B$  si pour tous  $i_1 < \dots < i_m$ , on a  $a_1, \dots, a_m \equiv_B a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ .

Étant donné un type  $p$  à paramètres sur  $B$ , une *suite de Morley*  $\{a_i\}_{i < \omega}$  de  $p$  est une suite indépendante et indiscernable sur  $B$  de réalisations de  $p$ .

Dans une théorie simple, tout type admet des suites de Morley. Afin de faciliter la présentation, sans introduire ni des hyperimaginaires ni des imaginaires, nous supposons par la suite que la théorie  $T$  satisfait la condition suivante :

**Hypothèse 6.** Si  $B = \langle B \rangle^{\text{alg}} \cap K$ , et  $\{a_i\}_{i < \omega}$  est une suite de Morley du type  $\text{tp}(a/B)$ , alors

$$a \downarrow_X B,$$

avec  $X = B \cap \langle \{a_i\}_{i < \omega} \rangle^{\text{alg}}$ .

Cette propriété est toujours vérifiée si  $T$  est supersimple avec élimination des imaginaires [3], ce qui est le cas des corps algébriquement clos, des corps différentiellement clos de caractéristique 0 avec  $n$  dérivations qui commutent [15, Corollary 3.3.2], des corps aux différences génériques en toute caractéristique et des corps différentiels aux différences [4, Proposition 3.36]. Pour les corps munis d'opérateurs libres en caractéristique 0, cette propriété suit de [16, Theorem 5.12 et Claim 6.17].

**Définition 2.3.** Un groupe  $G$  est *type-définissable* dans  $T$  sur un ensemble  $A$  de paramètres si son domaine est l'intersection d'ensembles définissables sur  $A$  muni d'une loi de groupe relativement définissable sur  $A$  (Si la théorie  $T$  est stable ou supersimple, alors  $G$  est l'intersection de groupes définissables sur  $A$  [18, Remark 5.5.1 et Theorem 5.5.4]). Il est *connexe* sur  $A$  s'il n'a pas de sous-groupes propres type-définissables sur  $A$  d'indice borné (par rapport à la saturation de  $K$ ).

Un élément  $g$  de  $G$  est générique sur  $A$  si, pour tout  $h$  dans  $G$  avec  $g \downarrow_A h$ , alors

$$h \cdot g \downarrow A \cup \{h\}.$$

Toute extension non-déviante d'un générique l'est aussi. Tout élément de  $G$  s'écrit comme le produit de deux génériques. En outre, le produit de deux génériques indépendants sur  $A$  l'est aussi et est indépendant sur  $A$  de chaque facteur. Si  $C$  est un translaté à droite d'un sous-groupe  $H \leq G$ , le tout type-définissable sur  $A$ , un élément  $c \in C$  est générique sur  $A$ , si pour un  $x \in C$ , le translaté  $x \cdot c^{-1}$  est générique dans  $H$  au-dessus de  $A \cup \{x\}$ .

**Définition 2.4.** Dans un groupe ambiant  $G$  type-définissable sur un ensemble  $A = \langle A \rangle^{\text{alg}} \cap K$ , le *stabilisateur (à gauche)*  $\text{Stab}(g/A)$  d'un élément  $g$  sur  $A$  est un sous-groupe type-définissable sur  $A$ , qui est défini par  $\text{Stab}(g/A) = \text{St}(g/A) \cdot \text{St}(g/A)$ ,

avec

$$\text{St}(g/A) = \{h \in G : \exists x \models \text{tp}(g/A) \ (hx \models \text{tp}(g/A) \wedge x \underset{A}{\perp} h)\}.$$

Tout générique du sous-groupe  $\text{Stab}(g/A)$  est contenu dans  $\text{St}(g/A)$ . Un élément  $g$  de  $G$  est générique sur  $A$  si et seulement si  $\text{Stab}(g/A)$  est d'indice borné.

Le résultat suivant a été démontré par Ziegler [23, Theorem 1] dans le cas stable abélien, et généralisé à tout groupe type-définissable dans une théorie simple [2, Lemme 1.2 et Remarque 1.3].

**Lemme 2.5.** *Étant donnés deux éléments  $a$  et  $b$  d'un groupe  $G$  type-définissable dans  $T$  tels que  $a$ ,  $b$  et  $a \cdot b$  sont deux-à-deux indépendants au-dessus d'un ensemble des paramètres  $A = \langle A \rangle^{\text{alg}} \cap K$ , alors  $a$  et  $a \cdot b$  ont même stabilisateur sur  $A$ , commensurable avec un conjugué de  $\text{Stab}(b/A)$ . Ces stabilisateurs sont connexes sur  $A$ . De plus, chaque élément est générique dans le translaté à droite par cet élément de son stabilisateur respectif. Ce translaté est aussi définissable sur  $A$ .*

Si  $G$  est abélien, alors les trois éléments ont même stabilisateur sur  $A$ .

Dans un groupe algébrique sur un pur corps algébriquement clos, les stabilisateurs obtenus dans le lemme précédent seront des sous-groupes algébriques.

**Corollaire 2.6.** *Un sous-groupe  $H$  de  $\mathbb{G}_a^k(K)$  type-définissable et connexe sur  $D = \langle D \rangle^{\text{alg}} \cap K$  d'indice non-borné est contenu dans un sous-groupe d'indice non-borné de la forme*

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{G}_a^k(K) \mid S(x_1, \dots, x_k) = 0\},$$

où  $S$  est une combinaison  $D$ -linéaire non triviale en les mots en  $x_i$ .

Même si les opérateurs ne sont pas nécessairement libres, la relation  $S = 0$  du corollaire précédent ne peut être imposée par la théorie.

Rappelons que le Frobenius apparaît dans les mots en  $x_i$  en caractéristique positive.

*Démonstration.* Soit  $a$  et  $b$  deux génériques de  $H$  indépendants sur  $D$ . Ainsi  $a$ ,  $b$  et  $a + b$  sont deux-à-deux indépendants sur  $A$  : les structures  $\langle D(a) \rangle$ ,  $\langle D(b) \rangle$  et  $\langle D(a + b) \rangle$  sont deux-à-deux algébriquement indépendantes sur  $D$ . Puisque  $H$  n'est pas d'indice borné, l'uple  $a$  n'est pas un générique de  $\mathbb{G}_a^k(K)$ . Par les propriétés sur les génériques et l'indépendance, il existe une suite finie de mots  $\theta$ , commune aux uples  $a$ ,  $b$  et  $a + b$ , qui témoigne une relation d'algébricité au-dessus de  $D^{\text{alg}}$  non-imposée par la théorie  $T$ . Dans le pur corps algébriquement clos  $K^{\text{alg}}$ , le lemme 2.5 appliqué aux uples  $\theta(a)$ ,  $\theta(b)$  et  $\theta(a + b)$  au-dessus de  $D^{\text{alg}}$  entraîne que leur stabilisateur  $H_1$  est un sous-groupe algébrique défini sur  $D^{\text{alg}}$  de la puissance correspondante du groupe additif  $\mathbb{G}_a$ . Le translaté  $H_1 + \theta(a)$  est également défini sur  $D^{\text{alg}}$ . Le sous-groupe  $H_1$  est propre car  $\theta(a)$  n'est pas algébriquement indépendant, et donné par des polynômes additifs. Ainsi, il existe une combinaison  $D^{\text{alg}}$ -linéaire  $S'$  non triviale en les mots en  $x_i$  et un élément  $d' \in D^{\text{alg}}$  tel que  $S'(a) = d'$ . Si  $K$  n'est pas algébriquement clos, il suffit de composer par une puissance suffisante du Frobenius pour obtenir une combinaison  $D$ -linéaire  $S$  et  $d \in D$  tel que  $S(a) = d$ .

Si  $a' \equiv_D a$  est indépendant de  $a$  sur  $D$ , alors  $a - a'$  est un générique de  $H$  sur  $D$  satisfaisant l'équation  $S(x_1, \dots, x_k) = 0$ , ce qui donne le résultat par connexité de  $H$ .  $\square$

**Remarque 2.7.** Notons que si le corps muni d'opérateurs n'était pas séparablement clos, par exemple, les corps pseudo-finis, nous aurions besoin d'une description (à indice fini prés) des sous-groupes additifs définissables.

**Définition 2.8.** Pour un type générique fixé  $p$  de  $K$  sur  $\emptyset$ , on définit la  $p$ -clôture  $\text{cl}_p(D)$  d'un ensemble  $D$  comme la collection des éléments  $x$  de  $K$  *co-étrangers* sur  $D$  à  $p$ , c'est-à-dire tels que, pour tout  $D_1 \supset D$  et toute réalisation  $a$  de  $p$ , générique sur  $D_1$ , on ait  $a \perp_{D_1} x$ .

Cette définition correspond à la définition usuelle [18, Definition 3.5.1], par [18, Remark 5.1.19].

**Remarque 2.9.** La cardinalité de  $\text{cl}_p(D)$  peut être comparable à celle de  $K$ , même si  $D$  est fini. Par exemple, dans le cas des corps différentiels avec  $n$  dérivations qui commutent, comme tout générique a rang  $\omega^n$  [15, Corollary 5.2.8], cette clôture contient tous les éléments non-génériques et, en particulier, les constantes.

Cette clôture ne dépend pas du générique  $p$  choisi. En effet : soient  $q$  un générique et  $x$  un élément de  $\text{cl}_q(D)$ . Considérons  $D_1 \supset D$  et une réalisation  $a$  de  $p$ , générique sur  $D_1$ . Soit  $b$  une réalisation de  $q$  générique sur  $D_1 \cup \{a\}$ . Alors  $b$  est encore générique sur  $D_1 \cup \{b^{-1} \cdot a\}$ , donc

$$b \perp_{D_1 \cup \{b^{-1} \cdot a\}} x,$$

ce qui entraîne

$$a \perp_{D_1 \cup \{b^{-1} \cdot a\}} x \text{ et par transitivité } a \perp_{D_1} x.$$

En particulier, si  $x$  est dans la clôture de  $D$ , il ne peut être générique sur  $D$ . La réciproque est vraie pour les purs corps algébriquement clos, les corps aux différences génériques et les corps différentiels aux différences [5, Corollary 2.9]. Ainsi, cette clôture correspond à la clôture algébrique pour les purs corps algébriquement clos et, dans le cas des corps différentiellement clos ou aux différences génériques, à la collection des éléments fini-dimensionnels au-dessus de  $D$ . [16, Definition 6.1]

Par la suite, la clôture de  $D$  sera notée simplement  $\text{cl}(D)$ .

Dans la remarque précédente, on a noté que la clôture de  $D$  correspondait à la collection de non-génériques sur  $D$  si la théorie a rang de Lascar  $\omega^\alpha$ , pour un certain ordinal  $\alpha$ . Nous remercions Z. Chatzidakis de nous avoir fourni les pistes nécessaires pour observer que ce n'est pas le cas pour les corps munis d'opérateurs libres.

**Remarque 2.10.** Soit un corps algébriquement clos en caractéristique nulle existentiellement clos suffisamment saturé muni de deux automorphismes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui ne commutent pas.

Par [16, Theorem 4.6], il existe un élément  $b$  tel que les relations algébriques entre les mots en  $b$  sont uniquement celles induites par l'équation  $\sigma_1(b) = b$ . On vérifie facilement que  $a = b + \sigma_2(b)$  est générique mais  $a \not\perp b$ , ce qui donne un exemple d'élément non-générique qui n'appartient pas à la clôture de  $\mathbb{F}$ .

En revanche, la clôture  $\text{cl}(D)$  n'est pas réduite à  $\langle D \rangle^{\text{alg}}$  : considérons  $D = \langle D \rangle^{\text{alg}}$  et  $x$  un élément. Modulo les identifications  $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \sigma_i \sigma_i^{-1} = \text{Id}$ , notons  $\Theta_r$  l'ensemble des mots en  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$  de longueur au plus  $r$  (Le mot vide de longueur 0 correspond à l'identité).

Posons

$$f_x(r) = \deg.\text{tr}(\Theta_r(x)/D),$$

où  $\Theta_r(x)$  est l'uple constitué des éléments  $\theta(x)$  pour  $\theta \in \Theta_r$ .

On a  $|\Theta_1 \setminus \Theta_0| = 4$  et  $|\Theta_{r+2} \setminus \Theta_{r+1}| = 3 \times |\Theta_{r+1} \setminus \Theta_r|$ . Ainsi, pour  $a$  générique sur  $D$ ,

$$\deg.\text{tr}(\Theta_{r+1}(a)/D(\Theta_r(a))) = f_a(r+1) - f_a(r) = 4 \times 3^r.$$

Si  $a \not\downarrow_D x$ , alors il existe des entiers  $r_0$  et  $s_0$  tels que

$$\deg.\text{tr}(\Theta_{r_0+1}(a)/D(\Theta_{r_0}(a), \Theta_{s_0}(x))) \leq 4 \times 3^{r_0} - 1.$$

Puisque pour tous entiers  $r$  et  $s$ ,

$$\deg.\text{tr}(\Theta_{r+2}(a)/D(\Theta_{r+1}(a), \Theta_{s+1}(x))) \leq 3 \deg.\text{tr}(\Theta_{r+1}(a)/D(\Theta_r(a), \Theta_s(x))),$$

on obtient pour tout  $m$  l'inégalité

$$\begin{aligned} 4 \times 3^{r_0+m} - f_x(s_0 + m) &\leq \deg.\text{tr}(\Theta_{r_0+m+1}(a)/D(\Theta_{r_0+m}(a), \Theta_{s_0+m}(x))) \\ &\leq 3^m(4 \times 3^{r_0} - 1), \end{aligned}$$

donc

$$f_x(s_0 + m) \geq 3^m.$$

Ainsi la clôture  $\text{cl}(D)$  contient tout élément  $x$  vérifiant  $f_x(r) = o(3^r)$ . Or, par compacité, il existe un élément  $c$  tel que les seules relations algébriques entre les mots en  $c$  sont celles induites par les équations  $\sigma_1(\sigma_2^l(c)) = \sigma_2^l(c)$  pour  $l \in \mathbb{Z}$ . Cet élément  $c$  n'est pas algébrique mais  $f_c(r) = 2r + 1$ , donc  $c \in \text{cl}(D)$ .

On peut vérifier de manière analogue que pour tout corps muni d'au moins deux opérateurs libres, la clôture ne contient pas tous les non-génériques et n'est pas réduite à la clôture algébrique.

Le caractère fini de l'indépendance et la transitivité donnent le résultat suivant.

**Corollaire 2.11.** *Pour tout générique  $a$  sur  $D$ ,*

$$a \downarrow_D \text{cl}(D).$$

Comme aucun générique sur un ensemble ne peut être dans la clôture algébrique (au sens modèle-théorique) de ce dernier, on a également la propriété suivante.

**Remarque 2.12.** Si  $b$  est un générique sur  $D$  qui appartient à  $\text{cl}(D, a)$ , alors  $b \not\downarrow_D a$ .

La remarque suivante est une adaptation directe de [18, Lemma 3.5.5].

**Remarque 2.13.** Si  $c$  appartient à  $\text{cl}(B)$  et  $c \downarrow_A B$  avec  $A \subset B$ , alors  $c$  appartient à  $\text{cl}(A)$ .

*Démonstration.* Soient  $D \supset A$  et un générique  $b$  sur  $D$ . Pour montrer que  $b \downarrow_D c$ , on peut supposer, par l'hypothèse (5)(1), que  $Db \downarrow_{Ac} B$ . Puisque  $c \downarrow_A B$ , alors

$$Dbc \downarrow_A B,$$

donc  $b \downarrow_D D \cup B$  et  $b$  est un générique sur  $D \cup B$ . Puisque  $c \in \text{cl}(B)$ , on a

$$b \downarrow_{D \cup B} c,$$

ce qui entraîne  $b \downarrow_D c$ , par transitivité.  $\square$

**Définition 2.14.** Un automorphisme  $\tau$  de la  $\mathcal{L}$ -structure  $K$  est *borné* s'il existe un ensemble  $D$  fini tel que, pour tout générique  $a$  sur  $D$ , l'élément  $\tau(a)$  appartient à  $\text{cl}(D, a)$ .

Par la remarque 2.9, on retrouve ainsi la définition originale de Lascar pour un pur corps algébriquement clos, ainsi que celle de Konnerth pour les corps différentiellement clos.

**Lemme 2.15.** *Soit  $\tau$  un automorphisme borné sur un ensemble fini de paramètres  $D$ , et  $a$  et  $b$  deux éléments génériques et indépendants sur  $D$ . Si l'on pose*

$$D_0 = \text{cl}(D) \cap \langle D(a, b, \tau(a), \tau(b)) \rangle^{\text{alg}},$$

*alors les paires  $(a, \tau(a))$ ,  $(b, \tau(b))$  et  $(ab, \tau(ab))$  (respectivement, les paires  $(a, \tau(a))$ ,  $(b, \tau(b))$  et  $(a + b, \tau(a + b))$ ) sont deux-à-deux indépendantes sur  $D_0$ .*

Par le corollaire 2.11, l'élément  $a$  reste indépendant sur  $D_0$ . De même pour  $\tau(a)$ , s'il était générique sur  $D$ .

*Démonstration.* On peut supposer par la suite que  $D = \langle D \rangle^{\text{alg}} \cap K$ . Le corollaire 2.11 et la transitivité de l'indépendance donnent que

$$a \downarrow_D \text{cl}(D, b).$$

Comme  $D_0 \cup \{b, \tau(b)\} \subset \text{cl}(D, b)$ , on en déduit que  $a \downarrow_{D_0} b, \tau(b)$ .

Soit  $\{a_i, c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de Morley du type  $\text{tp}(a, \tau(a)/D_0, b, \tau(b))$ , qui peut être prise telle que

$$\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \downarrow_{D_0} b, \tau(b),$$

par l'indépendance précédente. Pour  $X = \langle D_0(b, \tau(b)) \rangle^{\text{alg}} \cap \langle \{a_i, c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle^{\text{alg}} \cap K$ , l'hypothèse (6) entraîne que

$$a, \tau(a) \downarrow_X D_0, b, \tau(b).$$

Notons de plus que

$$\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \downarrow_{D_0} X.$$

Ainsi, comme chaque  $c_i \in \text{cl}(D_0, \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ , on a  $X \subset \text{cl}(D_0)$  par la remarque 2.13, donc  $X \subset \text{cl}(D_0) \cap \langle D_0(b, \tau(b)) \rangle^{\text{alg}} = D_0$  et, en particulier,

$$a, \tau(a) \downarrow_{D_0} b, \tau(b).$$

Du fait que  $ab$  soit également indépendant de  $a$  (et de  $b$ , respectivement) sur  $D$ , par la remarque 2.1, on conclut par symétrie. Le cas additif est traité de la même façon.  $\square$

**Remarque 2.16.** Notons que le lemme reste vrai, sans utiliser l'hypothèse (6), en considérant des hyperimaginaires (cf. [18, Chapter 3]).

## 3. PAS D'AUTOMORPHISMES BORNÉS

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour caractériser les automorphismes bornés. Cette démonstration est inspirée de celle de [9, Lemma 3.11].

**Théorème 3.1.** ([14, Théorème 15] et [13, Proposition 2.9])

Sur un corps  $\mathbb{F}$  de base, soit un corps  $(K, 0, 1, +, -, \cdot, F_1, \dots, F_n)$  muni d'opérateurs satisfaisant les conditions suivantes :

**Hypothèse 1** Tous les corps résiduels de la  $\mathbb{F}$ -algèbre associée sont  $\mathbb{F}$ .

**Hypothèse 2** Les endomorphismes associés  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$  sont surjectifs.

**Hypothèse 3** Le corps  $K$  est séparablement clos suffisamment saturé pour sa théorie  $T$ .

**Hypothèses 4 et 5** La théorie  $T$  est simple et vérifie :

$$A \downarrow_C B \iff \langle A \cup C \rangle^{alg} \text{ et } \langle B \cup C \rangle^{alg} \text{ sont linéairement disjointes sur } \langle C \rangle^{alg}.$$

Le type d'un uple  $a$  sur un sous-corps  $k = \langle k \rangle$  est déterminé par la classe de  $\mathcal{L}$ -isomorphisme de  $\langle k(a) \rangle^{alg} \cap K$ . De plus, la clôture algébrique modèleetheorique d'un ensemble  $A$  est égale à  $\langle A \rangle^{alg} \cap K$ .

**Hypothèse 6** Si  $B = \langle B \rangle^{alg} \cap K$  et  $\{a_i\}_{i < \omega}$  est une suite de Morley du type  $\text{tp}(a/B)$ , alors

$$a \downarrow_{B \cap \langle \{a_i\}_{i < \omega} \rangle^{alg}} B.$$

Alors, tout automorphisme borné de  $K$  est égal à la composition d'automorphismes associés et de leurs inverses, ainsi que du Frobenius et de son inverse si  $K$  est un corps algébriquement clos de caractéristique positive.

*Démonstration.* Soit  $\tau$  un automorphisme de la structure  $K$  borné au-dessus de l'ensemble fini  $D$ . Puisque la trigonalisation des opérateurs donne une structure bi-interprétable, avec les mêmes automorphismes associés, sur laquelle  $\tau$  induit aussi un automorphisme borné, nous supposons par la suite que les opérateurs sont triangulaires, comme dans la proposition 1.4.

Prenons deux éléments  $a$  et  $b$  génériques et indépendants sur  $D \cup \tau^{-1}(D)$ . En particulier, leurs images  $\tau(a)$  et  $\tau(b)$  sont aussi génériques sur  $D$ .

Posons  $D_0 = \text{cl}(D) \cap \langle D(a, b, \tau(a), \tau(b)) \rangle^{alg}$ . Le lemme 2.15 entraîne que les paires  $(a, \tau(a))$ ,  $(b, \tau(b))$  et  $(a + b, \tau(a + b))$  sont deux-à-deux indépendants sur  $D_0$ . De plus, les éléments  $a$  et  $\tau(a)$  restent génériques sur  $D_0$ . Le lemme 2.5 à l'intérieur de  $\mathbb{G}_a^2(K)$  donne que  $(a, \tau(a))$  est dans un translaté, type-définissable sur  $D_0$ , de son stabilisateur additif  $H \leq \mathbb{G}_a^2(K)$ , qui est connexe.

Puisque  $D \subset D_0$ , alors  $\tau(a) \in \text{cl}(D_0, a)$ , donc

$$a \not\downarrow_{D_0} \tau(a),$$

par la remarque 2.12. En particulier, la paire  $(a, \tau(a))$  n'est pas générique dans  $\mathbb{G}_a^2(K)$ , donc l'indice de  $H$  dans  $\mathbb{G}_a^2(K)$  n'est pas borné. Par le corollaire 2.6, le sous-groupe  $H$  est contenu dans un sous-groupe d'indice non borné défini par une combinaison linéaire sur  $D_0$  de la forme

$$\lambda_{\theta_1} \theta_1(x) + S_1(x) + \mu_{\theta_2} \theta_2(y) + S_2(y) = 0,$$

où  $S_1$ , respectivement  $S_2$ , est une combinaison linéaire de mots en  $x$ , respectivement en  $y$ , à coefficients sur  $D_0$  de degré strictement inférieur à  $\theta_1$ , respectivement à  $\theta_2$ .

Comme  $(a, \tau(a))$  est dans un translaté, il existe  $\xi$  dans  $D_0$  tel que :

$$\lambda_{\theta_1} \theta_1(a) + \mu_{\theta_2} \theta_2(\tau(a)) + S_1(a) + S_2(\tau(a)) = \xi. \quad (\diamond)$$

De plus  $\lambda_{\theta_1} \theta_1(a) + S_1(a) \neq 0$  et  $\mu_{\theta_2} \theta_2(\tau(a)) + S_2(\tau(a)) \neq 0$ , car les éléments  $a$  et  $\tau(a)$  sont chacun génériques sur  $D_0$ .

Quitte à remplacer  $D_0$ , prenons  $(\theta_1, \theta_2)$  minimal dans l'ordre lexicographique tel que  $(a, \tau(a))$  satisfait une telle équation sur des paramètres au-dessus desquels  $a$  et  $\tau(a)$  restent génériques.

À nouveau, le lemme 2.5 à l'intérieur du groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m^2(K)$  donne que l'uplet  $(a, \tau(a))$  a un stabilisateur  $H_1$  connexe et type-définissable sur  $D_0$ . Comme  $(a, \tau(a))$  est générique dans un translaté de  $H_1$ , aussi type-définissable sur  $D_0$ , on conclut que  $H_1$  est infini. En particulier, il existe des éléments génériques de  $H_1$  sur tout ensemble de paramètres.

Prenons  $(g, h)$  un générique de  $H_1$  indépendant de  $(a, \tau(a))$  sur  $D_0$ . Alors, l'élément  $(g \cdot a, h \cdot \tau(a)) \equiv_{D_0} (a, \tau(a))$ , donc

$$\lambda_{\theta_1} \theta_1(g \cdot a) + \mu_{\theta_2} \theta_2(h \cdot \tau(a)) + S_1(g \cdot a) + S_2(h \cdot \tau(a)) = \xi,$$

ce qui entraîne, par le corollaire 1.5

$$\lambda_{\theta_1} \sigma_{\theta_1}(g) \theta_1(a) + \mu_{\theta_2} \sigma_{\theta_2}(h) \theta_2(\tau(a)) + S'_1(a) + S'_2(\tau(a)) = \xi, \quad (\star)$$

pour des combinaisons linéaires  $S'_1$  et  $S'_2$  sur  $\langle D_0(g, h) \rangle$ , de degrés inférieurs à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , respectivement. Comme  $a$  et  $\tau(a)$  restent chacun générique sur  $\langle D_0(g, h) \rangle$ , si l'on multiplie  $(\diamond)$  par  $\sigma_{\theta_2}(h)$  et l'on soustrait  $(\star)$ , on obtient des combinaisons linéaires  $R_1$  et  $R_2$  sur  $\langle D_0(g, h) \rangle$ , de degrés inférieurs à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , respectivement, telles que

$$\lambda_{\theta_1} (\sigma_{\theta_1}(g) - \sigma_{\theta_2}(h)) \theta_1(a) + R_1(a) + R_2(\tau(a)) = \xi(1 - \sigma_{\theta_2}(h)).$$

La minimalité de  $(\theta_1, \theta_2)$  donne que

$$\sigma_{\theta_1}(g) = \sigma_{\theta_2}(h).$$

Puisque  $H_1$  est connexe, on en déduit que

$$H_1 \subset \{(g, h) \in \mathbb{G}_m^2 \mid \sigma_{\theta_1}(g) = \sigma_{\theta_2}(h)\}.$$

Ainsi, il existe un élément  $\lambda_a \neq 0$  dans  $D_0$  tel que  $\sigma_{\theta_2}(\tau(a)) = \lambda_a \cdot \sigma_{\theta_1}(a)$ , car  $(a, \tau(a))$  est dans un translaté multiplicatif de  $H_1$  type-définissable sur  $D_0$ .

Comme  $b$  est un générique quelconque indépendant de  $a$  sur  $D \cup \tau^{-1}(D)$  et que  $(b, \tau(b))$  a même stabilisateur additif  $H$  que  $(a, \tau(a))$ , on en déduit que pour tout générique  $x$  sur  $D \cup \tau^{-1}(D)$ , il existe un élément  $\lambda_x \neq 0$  dans  $K$  tel que  $\sigma_{\theta_2}(\tau(x)) = \lambda_x \cdot \sigma_{\theta_1}(x)$  (pour les mêmes mots  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ).

De plus, on a l'égalité :

$$\lambda_{a+b} \sigma_{\theta_1}(a+b) = \sigma_{\theta_2}(\tau(a+b)) = \sigma_{\theta_2}(\tau(a)) + \sigma_{\theta_2}(\tau(b)) = \lambda_a \sigma_{\theta_1}(a) + \lambda_b \sigma_{\theta_2}(b).$$

En particulier,

$$(\lambda_{a+b} - \lambda_a)\sigma_\theta(a) = (\lambda_b - \lambda_{a+b})\sigma_\theta(b),$$

qui entraîne  $\lambda_a = \lambda_{a+b} = \lambda_b$ , car  $a \perp_{D_0} b$ .

Alors, pour tout générique  $x$  sur  $D \cup \tau^{-1}(D)$ , on a  $\lambda_x = \lambda_a$  et  $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_{a \cdot b} = \lambda_a \cdot \lambda_b$ , donc  $\lambda_a = 1$ . Enfin, puisque tout élément s'écrit comme une somme de deux génériques, on obtient l'égalité  $\sigma_{\theta_2} \circ \tau = \sigma_{\theta_1}$ .

Comme le Frobenius commute avec tout automorphisme corpique, il existe deux entiers naturels  $m_1$  et  $m_2$ , et des automorphismes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  qui sont compositions de puissances entières des automorphismes associés, tels que  $\sigma_{\theta_i} = \text{Frob}^{m_i} \circ \tau_i$ , pour  $i = 1, 2$ . Puisque  $\tau$  est un automorphisme, on a nécessairement  $m_1 = m_2$  si  $K$  n'est pas algébriquement clos, ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 3.2.** Tout corps séparablement clos de degré d'imperfection fini, muni d'une famille finie commutative de dérivations de Hasse-Schmidt itératives avec une  $p$ -base canonique nommée, vérifie les hypothèses 4, 5 et 6 [7, 22]. Par la remarque 1.6, la preuve du théorème précédent s'applique également à ce contexte. Ainsi, aucun corps séparablement clos de degré d'imperfection fini non nul ne possède d'automorphismes bornés non-triviaux fixant une  $p$ -base (rappelons que toute  $p$ -base détermine une famille finie commutative de dérivations, qui sont définissables au-dessus de celle-ci).

Nous ignorons si les hypothèses sont vérifiées pour tout corps muni de  $G$ -dérivations [10].

Puisque les automorphismes associés à un corps muni d'opérateurs libres existentiellement clos ne commutent pas avec les opérateurs, ils ne sont pas des  $\mathcal{L}$ -automorphismes, ce qui donne le résultat suivant.

**Corollaire 3.3.** *Un corps muni d'au moins deux opérateurs libres existentiellement clos n'a pas d'automorphismes bornés non-triviaux.*

**Corollaire 3.4.** ([14, Corollaire 16] et [8, Example 3.13]) *Le groupe  $\text{Aut}_f(M)$  est simple, pour  $M$  un corps de caractéristique 0 saturé dénombrable algébriquement clos ou différentiellement clos de caractéristique 0. Si  $M$  est un corps de caractéristique positive saturé dénombrable algébriquement clos, alors le groupe  $\text{Aut}_f(M)$  est simple modulo le sous-groupe monogène engendré par le Frobenius.*

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Atiyah, I. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley (1969).
- [2] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. O. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, to appear, (2016), (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00758982>).
- [3] S. Buechler, A. Pillay, F.O. Wagner, *Supersimple theories*, J. Amer. Math. Soc. **14**, (2001), 109–124.
- [4] R. F. Bustamante Medina, *Differentially closed fields of characteristic zero with a generic automorphism*, Revista de Matemática : Teoría y Aplicaciones, vol. 14 (2007), 81–100.
- [5] R. F. Bustamante Medina, *Rank and dimension in difference-differential fields*, Notre Dame J. Formal Logic **52**, (2011), 403–414.
- [6] Z. Chatzidakis, E. Hrushovski, *Model Theory of difference fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, (1999), 2997–3071.
- [7] F. Delon, *Idéaux et types sur les corps séparablement clos*, Mém. Soc. Math. Fr. **33**, (1988), pp. 76.



- [8] D. Evans, Z. Ghadernezhad, K. Tent, *Simplicity of the automorphism groups of some Hrushovski constructions*, preprint, (2013), (<http://arxiv.org/abs/1312.3430>).
- [9] C. Hardouin, A. Minchenko, A. Ovchinnikov, *Calculating differential Galois groups of parametrized differential equations with applications to hypertranscendence*, preprint, (2016).
- [10] D. Hoffmann, P. Kowalski, *Existentially closed fields with  $G$ -derivations*, to appear, (2016), (<http://arxiv.org/abs/1404.7475>).
- [11] E. Hrushovski, *The elementary theory of the Frobenius automorphism*, preprint, (2004), (<http://arxiv.org/pdf/math/0406514v1.pdf>).
- [12] B. Kim, A. Pillay, *Simple Theories*, *Annals of Pure and Applied Logic* **88**, (1997), 149–164.
- [13] R. Konnerth, *Automorphism groups of differentially closed fields*, *Ann. Pure Appl. Logic* **118**, (2002), 1–60.
- [14] D. Lascar, *Les automorphismes d'un ensemble fortement minimal*, *J. Symbolic Logic* **57**, (1992), 238–251.
- [15] T. McGrail, *The model theory of differential fields with finitely many commuting derivations*, *J. Symbolic Logic* **65**, (2000), 885–913.
- [16] R. Moosa, T. Scanlon, *Model theory of fields with free operators in characteristic zero*, *J. Math. Logic* **14**, (2014), 1450009 (43 pages).
- [17] R. Pierce, *Associative Algebras*, Springer-Verlag, (1982).
- [18] F. O. Wagner, *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, (2000).
- [19] F. O. Wagner, *Automorphismes bornes dans les structures simples*, preprint, (2015), (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01162721/>).
- [20] C. Wood, *Notes on the stability of separably closed fields*, *J. Symbolic Log.* **44**, (1979), 412–416.
- [21] M. Ziegler, *Correspondance privée avec D. Lascar*, (1991).
- [22] M. Ziegler, *Separably closed fields with Hasse derivations*, *J. Symbolic Logic* **68**, (2003), 311–318.
- [23] M. Ziegler, *A note on generic types*, preprint, (2006), (<http://arxiv.org/math.L0/0608433>).

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,  
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE UMR5219, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118  
ROUTE DE NARBONNE, F-31062 TOULOUSE CEDEX 9, FRANCE.

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,  
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE.

*E-mail address:* [blossier@math.univ-lyon1.fr](mailto:blossier@math.univ-lyon1.fr)

*E-mail address:* [charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr](mailto:charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr)

*E-mail address:* [pizarro@math.univ-lyon1.fr](mailto:pizarro@math.univ-lyon1.fr)